2.16) a) 1) Tomo v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $C_v(v_1) = v \times v_1$

$C_v(v_2) = v \times v_2$

$\rightarrow C_v(v_1+v_2) = v \times (v_1+v_2) = v \times v_1 + v \times v_2 = C_v(v_1) + C_v(v_2)$ ✓

2) Tomo $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in K$

$C_v(\lambda v_1) = v \times (\lambda v_1) = \lambda . (v \times v_1) = \lambda . C_v(v_1)$ ✓

Usé propiedades del producto vectorial.

b) $Nu(C_{[1\ 2\ 3]^T}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : [1\ 2\ 3] \times x = [0\ 0\ 0]^T\}$

Dados dos vectores no nulos, el prod. vect. de ambos es el vector nulo si y sólo si los vectores son paralelos.

Entonces los $\bar{x}$ que cumplan serán, además del $[0\ 0\ 0]^T$, los paralelos a $[1\ 2\ 3]^T$

$\rightarrow Nu(C_{[1\ 2\ 3]^T}) = gen\{[1\ 2\ 3]^T\}$

Representa una recta que pasa por el origen.

c) Una base del núcleo de $C_{[1\ 2\ 3]^T}$, por lo calculado en el punto b), es: $\boxed{B_{Nu(C_{[1\ 2\ 3]^T})} = \{[1\ 2\ 3]^T\}}$

Entonces, una base de C_v es: $\boxed{B_{Nu(C_v)} = \{v\}}$

d) Busco los transformados de los canónicos de $\mathbb{R}^3$:

$$C_v([1\ 0\ 0]^T) = [a\ b\ c]^T \times [1\ 0\ 0]^T = [0\ c\ -b]^T$$

$$C_v([0\ 1\ 0]^T) = [a\ b\ c]^T \times [0\ 1\ 0]^T = [-c\ 0\ a]^T$$

$$C_v([0\ 0\ 1]^T) = [a\ b\ c]^T \times [0\ 0\ 1]^T = [b\ -a\ 0]^T$$

$$\to \operatorname{Im} C_v = \langle \underbrace{[0\ c\ -b]^T}_{v_1}, \underbrace{[-c\ 0\ a]^T}_{v_2}, \underbrace{[b\ -a\ 0]^T}_{v_3} \rangle$$

Como $\dim(\operatorname{Im}(C_v)) = \underbrace{\operatorname{Dim}(\mathbb{R}^3)}_{=3} - \underbrace{\operatorname{Dim}(\operatorname{Nu}(C_v))}_{=1} = 2$

Busco por elim. gaussiana el LD:

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & c & -b \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} F_3 \to bF_1 + cF_3 \quad \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & c & -b \\ 0 & -c.a & b.a \end{pmatrix} F_3 \to aF_2 + F_3$$

$$\begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & c & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces una base de la imagen serían v_1 y v_2.

$$\boxed{B_{\operatorname{Im}(C_v)} = \{[0\ c\ -b]^T, [-c\ 0\ a]^T\}}$$

Plano ortogonal a $[a\ b\ c]^T$

e) $C_v(x) = (1,1,1)$

$$\to [a\ b\ c]^T \times [x_1\ x_2\ x_3]^T = [1\ 1\ 1]^T$$

Entonces:

$$\begin{cases} bx_3 - cx_2 = 1 \\ -(ax_3 - cx_1) = 1 \\ ax_2 - bx_1 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -c & b & 1 \\ c & 0 & -a & 1 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & -a & 1 \\ 0 & -c & b & 1 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) F3 \to bF1 + cF3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & -a & 1 \\ 0 & -c & b & 1 \\ 0 & ca & -ba & b+c \end{array}\right) F3 \to aF2 + F3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & -a & 1 \\ 0 & -c & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{cases} cx_1 - ax_3 = 1 & \text{I} \\ -cx_2 + bx_3 = 1 & \text{II} \\ a+b+c = 0 \to a = -b-c & \text{III} \end{cases}$$

III en I $\to cx_1 + bx_3 + cx_3 = 1 \to cx_1 = 1-(b+c)x_3 \to \underline{x_1 = \frac{1}{c} - \frac{(b+c)}{c}x_3}$

de II $\to -cx_2 = 1 - bx_3 \to \underline{x_2 = -\frac{1}{c} + \frac{b}{c}x_3}$

Entonces los $\bar{X}$ que cumplan serán de la forma:

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{c} - \frac{(b+c)}{c}x_3 \,;\, -\frac{1}{c} + \frac{b}{c}x_3 \,;\, x_3\right) = x_3 . \left(\overbrace{\frac{-(b+c)}{c}}^{=a} ; \frac{b}{c} ; 1\right) + \left(\frac{1}{c} ; -\frac{1}{c} ; 0\right) \to$$

$$\to = \boxed{\underbrace{x_3 . \left(\frac{a}{c} ; \frac{b}{c} ; 1\right)}_{\text{sol. núcleo}} + \underbrace{\left(\frac{1}{c} ; -\frac{1}{c} ; 0\right)}_{\text{sol. particular}} , \quad x_3 \in \mathbb{R}}$$

Es una recta que pasa por $\left(\frac{1}{c} ; -\frac{1}{c} ; 0\right)$ y es paralela a $\left(\frac{a}{c} ; \frac{b}{c} ; 1\right)$